LES IDENTITES REMARQUABLES

I- Généralité :

Soit a et b deux nombres positifs. Le carré ABCD représenté sur la figure 1 a pour côté $a + b$. À l'intérieur, sont construits deux autres carrés de côtés respectifs a et b, et deux rectangles de mêmes dimensions a et b.

L'aire de ABCD peut se calculer par deux méthodes différentes :

***Première méthode* :** c'est l'aire d'un carré de côté $a + b$, soit $(a + b)^2$.

***Seconde méthode* :** c'est aussi l'aire du carré de côté a, plus les aires des deux rectangles, plus l'aire du carré de côté b, soit $a^2 + ab + ab + b^2$.

De ces deux calculs, on déduit l'égalité : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. C'est une identité remarquable.

1- Les Trois identités remarquables :

- *Deux identités semblables :*

L'égalité écrite en introduction reste vraie quels que soient les signes des nombres a et b. On a ainsi, pour tous nombres a et b :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **;**

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**.**

***Remarques* :**

à gauche du signe **« = »** figure la forme factorisée de l'identité ; à sa droite, on trouve la forme développée ;
les expressions développées ne diffèrent que par le signe du terme $2ab$, appelé « **double-produit** », ce qui permet de les retenir facilement ;

pour retrouver la deuxième identité à partir de la première, on peut écrire $(a - b)^2 = [a + (-b)]^2$, donc $(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

- *Une autre identité :*

Soit a et b deux nombres positifs. On a ôté d'un grand carré de côté a un petit carré de côté b.

Calculons l'aire de la surface restante jaune par deux méthodes.

Première méthode **:** c'est la différence entre l'aire du grand carré et l'aire du petit carré, soit $a^2 - b^2$.

Seconde méthode **:** on fait un découpage de la surface restante, puis on recompose les morceaux. On obtient un rectangle dont les dimensions sont $a + b$ et $a - b$. Son aire est égale à $(a + b)(a - b)$.

On obtient ainsi : $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$.

Cette égalité est vraie quels que soient les signes des nombres a et b.

2- Applications :

Soit x un nombre. On veut développer les expressions suivantes : $(2x + 3)^2$; $(3x – 4)^2$ et $(5x + 2)(5x – 2)$.

$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$(3x – 4)^2 = (3x)^2 – 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 – 24x + 16$

$(5x + 2)(5x – 2) = (5x)^2 – 2^2 = 25x^2 – 4$

Soit x un nombre.

Exemple 1 **:**

On veut factoriser les expressions : $9x^2 – 12x + 4$; $81 – 9x^2$ et $16x^2 + 24x + 9$

$9x^2 – 12x + 4 = (3x)^2 – 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x – 2)^2$

$81 – 9x^2 = 9^2 – (3x)^2 = (9 + 3x)(9 – 3x)$

$16x^2 + 24x + 9 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 = (4x + 3)^2$

Exemple 2 **:** on veut factoriser l'$10^2 – (5x + 3)^2$.

On reconnaît ici une expression de la forme $a^2 – b^2$, où le rôle de a est joué par la parenthèse $(2x + 1)$ et celui de b par la parenthèse $(5x + 3)$.

On a donc $(2x + 1)^2 – (5x + 3)^2 = [(2x + 1) + (5x + 3)][(2x + 1) – (5x + 3)]$

On termine en réduisant chaque crochet : $(2x + 1 + 5x + 3)(2x + 1 – 5x – 3) = (7x + 4)(–3x – 2)$

On veut calculer mentalement : 53^2 ; 79^2 et 41×39.

On transforme chaque écriture pour pouvoir utiliser une identité remarquable. Les étapes détaillées ci-dessous sont à effectuer mentalement dans la pratique :

$53^2 = (50 + 3)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 3 + 3^2 = 2\,500 + 300 + 9 = 2\,809$

$79^2 = (80 - 1)^2 = 80^2 - 2 \times 80 \times 1 + 1^2 = 6\,400 – 160 + 1 = 6\,241$

$41 \times 39 = (40 + 1)(40 – 1) = 40^2 – 1^2 = 1\,600 – 1 = 1599$